SULLA

SCIENZA ASSOLUTA DELLO SPAZIO

PER

GIOVANNI BOLYAI

VERSIONE DAL LATINO

DEL

PROF. G. BATTAGLINI

(estratto dal giornale di matematiche)

NAPOLI
LIBRERIA B. PELLERANO
Strada di Chiaia 60
1868

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

SULLA SCIENZA DELLO SPAZIO ASSOLUTAMENTE VERA, ED INDIPENDENTE DALLA VERITÀ O DALLA FALSITÀ DELL'ASSIOMA XI DI EUCLIDE (GIAMMAI DA POTERSI DECIDERE A PRIORI).

PER

GIOVANNI BOLYAI

(Versione dal latino) (1)

Spiegazione dei segni.

Dinoli

...*ab*... , il complesso di *tutt'i* punti situati in linea retta con i punti *a, b*.

ab... , quella metà della rella ...*ab*... bisegata in *a*, che comprende il punto *b*.

...*abc* .., il complesso di *tutt'i* punti, che sono nello stesso piano con i punti *a,b,c* (non posti in linea retta).

abc... , la metà del piano ...*abc*... bisegato da ...*ab*..., che comprende il punto *c*.

abc , delle porzioni, nelle quali ...*abc*... è diviso dal complesso delle rette *ba*..., *bc*..., la *minore*; vale a dire l'*angolo* di cui *ba*...,*bc*... sono i lati.

abcd, (se *d* sia in *abc*, e ...*ba*..., ...*cd*... non s'incontrino) la porzione di *abc* compresa tra *ba*... , *bc*, *cd*...; *bacd* poi la porzione del piano ...*abc*... posta tra ...*ab*..., ...*cd*...

$\lfloor\_$, perpendicolare.

R , l'angolo retto.

$ab \bigvee cd$, $cab = acd$.

$\equiv$, congruente (*).

$x \curvearrowright a$, x tendere al limite a.

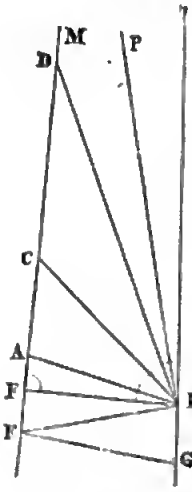
(*) Ci sia lecito, coo questo segoo, col quale il sommo Geometra GAUSS diootò i *numeri congrui*, iodicare aoche la coogrueoza geometrica; noo essendovi a temere da ciò alcuna ambigoità.

(1) Diamo qoi la traduziooe fedele della importante *Appendix* di G. BOLYAI tratta dall'opera di W. BOLYAI, *Tentamen juventutem studiosam* etc. Maros Vásárheli 1832.

Per convenieoza tipografica si sooo mutati solamente, o tralasciati alcuoi dei segni usati dall' Autore. Si sooo poi adoperate le abbreviazioni per.*r* e cir.*r* per dinotare la periferia e la superficie del circolo di raggio *r*.

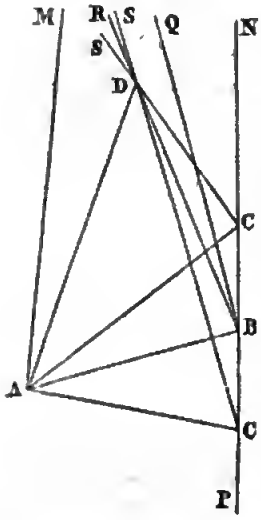
Per ioavvertenza dell' incisore le lettere apposte alle figure sooo maiuscole, meotre oel testo sono minuscole. — G. BATTAGLINI.

§ 1. (Fig. 1). Se la retta *am*... non la incontri la retta *bn*... dello stesso piano, ma la incontri ogni retta *bp*... (in *abn*), si dinoti ciò con *bn* ||| *am*. È manifesto *darsi* tale retta *bn*..., ed *una sola*, per ogni punto *b* (fuori di *am*...), ed essere *bam*+*abn* non > 2R; infatti fatta girare *bc* intorno a *b* sino a che sia *bam*+*abc*=2R, la retta *bc*... *una prima volta* non incontra *am*, ed è allora *bc* ||| *am*. Inoltre è chiaro essere *bn* ||| *em*, dovunque sia *e* in ...*am*... (supponendo in tutti questi casi essere *am*>*ae*). E se, allontanandosi il punto *c* in *am*... all'infinito, sia sempre *cd*=*cb*, sarà sempre *cdb*=(*cbd*<*nbc*); ma *nbc*⌢0, adunque anche *adb*⌢0.



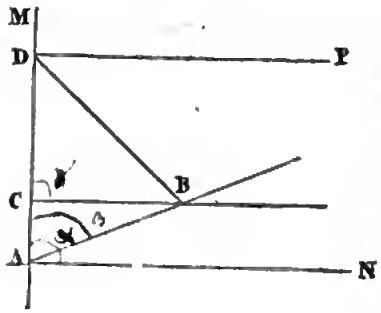
§ 2. (Fig. 2). Se *bn* ||| *am*, è anche *cn* ||| *am*. Infatti sia *d* ovunque in *macn*. Se *c* sia in *bn*..., *bd*... incontra *am*... (per essere *bn* ||| *am*), e quindi anche *cd*... incontra *am*...; se poi *c* sia in *bp*..., sia *bq* ||| *cd*: cade *bq*... in (*abn*) (§ 1), ed incontra *am*..., quindi anche *cd*... incontra *am*... Adunque qualunque retta *cd*... (in *acn*) incontra, nell'uno e nell'altro caso, *am*..., mentre *cn*... non incontra *am*... È dunque sempre *cn* ||| *am*.

§ 3. (Fig. 2). Se tanto *br* quanto *cs* sia ||| *am*, e *c* non sia in *br*..., allora *br*..., *cs*... non s'intersegano. Poichè se *br*..., *cs*... avessero il punto *d* comune, (per § 2) sarebbero *dr* e *ds* entrambe ||| *am*, e cadrebbe (§ 1) *ds*... in *dr*... e *c* in *br*... (contro l'ipotesi).



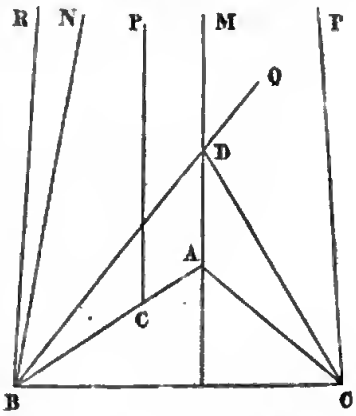
§ 4. (Fig. 3). Se *man*>*mab*, per ogni punto *b* di *ab*... *si dà* tale punto *c* in *am*..., in modo che sia *bcm*=*nam*. Infatti si dà (per § 1) *bdm*>*nam*, e quindi *mdp*=*man*, e cade *b* in *nadp*. Adunque se *nam* si porti lungo *am*, sino a che *an*... pervenga in *dp*..., bisogna che una volta *an*... passi per *b*, e sia un *bcm*=*nam*.

§ 5. (Fig. 1). Se *bn* ||| *am*, *si dà* tale punto *f* in ...*am*..., in modo che sia *fm*⋁*bn*. Infatti (per § 1) si dà *bcm*>*cbn*, e se *ce*=*cb*, e quindi *ec*⋁*bc*, è manifesto essere *bcm*<*cbn*. Si muova *p* lungo *ec*, e si chiami sempre *u* l'angolo *bpm*, e *v* l'angolo *pbn*; è chiaro essere *u* prima minore del suo simultaneo *v*, e poi divenirne maggiore. Cresce intanto *u* da *bcm* sino a *bcm continuamente*, mentre (per § 4) nessun angolo si dà >*bcm* e <*bcm*, al quale *u* una volta non sia eguale; similmente decresce *v* da *cbn* sino a *cbn* continuamente: si dà adunque in *ec* tale *f* in modo che sia *bfm*=*fbn*.

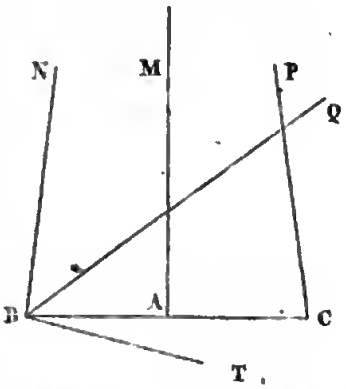


§ 6. Se *bn* ||| *am*, e sia ove si voglia *e* in ...*am*..., e *g* in ...*bn*..., allora *gn* ||| *em* ed *em* ||| *gn*. Infatti (per § 1) è *bn* ||| *em*, e quindi (per § 2) *gn* ||| *em*. D'altronde se *fm*⋁*bn* (§ 5), allora *mfbn*=*nbfm*, e quindi (essendo *bn* ||| *fm*) anche *fm* ||| *bn*, e (per le cose precedenti) *em* ||| *gn*.

§ 7. (Fig. 4). Se tanto *bn* quanto *cp* sia ||| *am*, e *c* non sia in *...bn...*, è anche *bn* ||| *cp*. Infatti *...bn...*, *...cp...* non s'intersegano (§ 3); sono intanto *am*, *bn*, *cp* o in un piano, o no, e nel primo caso *am* è o non è in *bncp*. Se *am*, *bn*, *cp* siano in un piano, ed *am* cada in *bncp*, allora qualunque *bq...* (in *nbc*) incontra *...am...* in un punto *d* (poichè *bn* ||| *am*); d'altronde essendo *dm* ||| *cp* (per § 6), è chiaro *dq...* incontrare *cp...*, e quindi essere *bn* ||| *cp*. Se poi *bn*, *cp* siano dalla stessa parte di *am*, allora una di esse p. e. *cp* cade *tra* le due rimanenti *...bn...*, *...am...*; qualunque *bq...* (in *nba*) intanto incontra *am...*, e quindi anche *cp...* È dunque *bn* ||| *cp*.

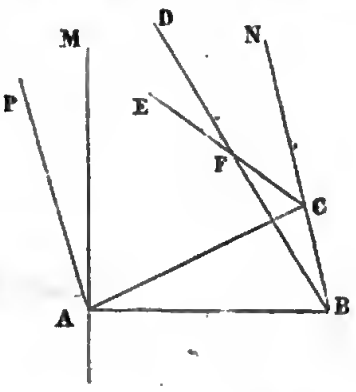


Se *mab*, *mac* comprendano un angolo; allora *cbn* con *abn*, se non *bn...*, *am...* poi (in *abn*) con *bn...*, e quindi *nbc* anche con *am...*, nulla hanno di comune. Per qualsivoglia *bd...* (in *nba*) intanto condotto *bcd...* esso incontra *am...*, poichè (per *bn* ||| *am*) *bd...* incontra *am...* Fatto girare *bcd...* intorno a *bc*, finchè *per la prima volta* lasci *am...*, da ultimo cadrà *bcd...* in *bcn...* Per la stessa ragione cadrà il medesimo in *bcp...*, cade adunque *bn* in *bcp*. D'altronde se *br* ||| *cp*, allora (poichè anche *am* ||| *cp*) per simile ragione cade *br* in *bam*, non che (per *br* ||| *cp*) in *bcp*. Perciò *br...* comune ad *mab*, *pcb*, è appunto la *bn...*, e quindi *bn* ||| *cp* (*).



Adunque se *cp* ||| *am*, e *b* sia fuori *...cam...*, l'intersezione di *bam*, *bcp*; o sia *bn...* è ||| tanto ad *am* quanto a *cp*.

§ 8. (Fig. 5). Se sia *bn* ||| e ⋁*cp* (o più brevemente *bn* ||| ⋁*cp*), ed *am* (in *nbcp* bisechi la retta *bc* ⌊mente, allora *bn* ||| *am*. Poichè se *bn...* incontrasse *am...*, anche *cp...* incontrerebbe *am...* nello stesso punto (essendo *mabn*≡*macp*), il quale sarebbe comune a *bn...*, *cp...*, quantunque sia *bn* ||| *cp*. Ora qualunque *bq...* (in *cbn*) incontra *cp...*, quindi *bq...* incontra anche *am...* Per conseguenza *bn* ||| *am*.

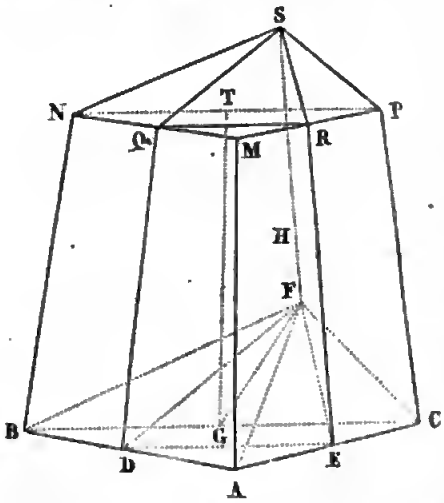


§ 9. (Fig. 6) Se *bn* ||| *am*, *map*⌊*mab*, e l'angolo che fa *nbd* con *nba* (da quella parte di *mabn* in cui è *map*) sia <R, allora *map* ed *nbd* s'intersegano. Infatti sia *bam*=R, *ac*⌊*bn* (sia che *c* cada o no in *b*) e *cc*⌊*bn* (in *nbd...*); sarà (per

(*) Premesso il caso 3°, i due primi, a somiglianza del caso 2° § 10 più brevemente e più elegantemente possono simultaneamente essere stabiliti.

ipo.) $ace < R$, ed $af(\llcorner ce)$ cadrà in ace. Sia $ap...$ l'intersezione di $abf...$ ed $amp..$ (che hanno il punto a comune); sarà $bap = bam = R$ (essendo $bam \llcorner map$). Se infine si ponga $abf...$ in $abm...$ (rimanendo fissi a e b), cadrà $ap...$ in am, ed essendo $ac \llcorner bn$ ed $af < ac$, è chiaro af terminarsi *all'indentro* di $bn...$, e quindi bf cadere in abn. Incontra intanto $bf...$ la $ap...$ nell'*attuale* posizione (poichè $bn \Vdash am$), e quindi anche nella posizione *primitiva*, $ap...$ e $bf...$ s'intersegano, ed è il punto di intersezione comune ad $map...$ ed $nbd...$, adunque $map...$ ed $nbd....$ si segano scambievolmente. Segue facilmente da ciò $map...$ ed $nbd...$ intersegarsi, se la somma degl'interni, che fanno con $mabn$, sia $< 2R$.

§ 10. (Fig. 7) Se tanto bn quanto cp sia $\Vdash \bigvee am$, è anche $bn \Vdash \bigvee cp$. Infatti mab ed mac o fanno un angolo, o sono in un piano.



Nel primo caso: biseghi $...qdf...$ la retta ab $\llcorner$ mente; sarà $dq \llcorner ab$, e quindi $dq \Vdash am$ (§ 8); similmente se $...ers..$ biseghi la retta $ac \llcorner$ mente, è $er \Vdash am$, onde $dq \Vdash er$ (§ 7). Facilmente segue da ciò (per § 9), $...qdf...$ ed $...ers...$ intersegarsi, e la sezione $...fs...$ essere $\Vdash dq$ (§ 7), e, per $bn \Vdash dq$, essere anche $fs \Vdash bn$. È d'altronde (per ogni punto di $...fs...$) $fb = fa = fc$, e cade $...fs...$ nel piano $...tgf..$, che bisega la retta $bc \llcorner$ mente. È poi (per § 7) (essendo $fs \Vdash bn$) anche $gt \Vdash bn$. Nello stesso modo si dimostra essere $gt \Vdash cp$. Frattanto gt bisega la retta $bc \llcorner$ mente, e quindi $tgbn \equiv tgcp$ (§ 4) e $bn \Vdash \bigvee cp$.

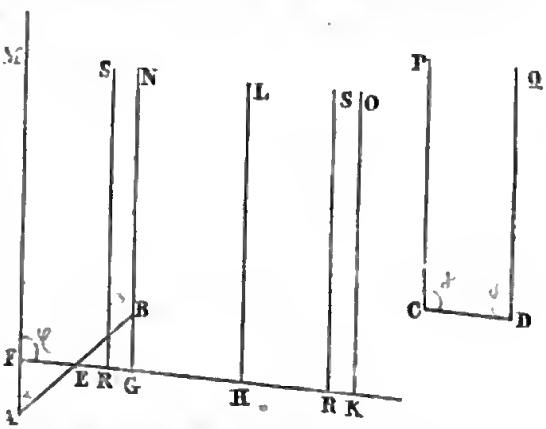
Se bn, am, cp siano in un piano, sia (cadente *fuori* di questo piano) $fs \Vdash \bigvee am$; allora (per le cose precedenti) $fs \Vdash \bigvee$ tanto a bn quanto a cp, e quindi anche $bn \Vdash \bigvee cp$.

§ 11. Il complesso del punto a, e di *tutti* i punti, di cui ciascuno b è tale, che se sia $bn \Vdash am$, sia anche $bn \bigvee am$, si dica F; la sezione poi di F con ogni piano contenente am si chiami L. In ogni retta, che è $\Vdash am$, F ha un punto, ed un solo; ed è chiaro L essere divisa da am in due parti congruenti; si dica $am...$ l'*asse* di L; è manifesto ancora, in ogni piano contenente am, per l'*asse* $am...$ darsi un solo L. Ogni L di tal fatta, si dica l'L di $am...$ (intendendo nel piano di cui si tratta). È evidente, per mezzo della rivoluzione di L intorno ad am, descriversi F, di cui $am...$ si chiami l'asse, e viceversa F *si attribuisca all'asse* $am...$

§ 12. Se b sia ove si voglia nell'L di $am...$, e $bn \Vdash \bigvee am$ (§ 11), allora l'L di $am...$ e l'L di $bn...$ *coincidono*. Infatti dicasi l'L di $bn...$ per distinzione l, e sia c ove si voglia in l, $cp \Vdash \bigvee bn$ (§ 11); sarà (essendo $bn \Vdash \bigvee am$) $cp \Vdash \bigvee am$ (§ 10), e quindi c cadrà anche in L. E se c sia ove si voglia in L, e $cp \Vdash \bigvee am$, allora $cp \Vdash \bigvee bn$ (§ 10), e c cade anche in l (§ 11). Adunque L ed l sono la stessa cosa; ed ogni $bn...$ è anche

asse di L, e tra tutti gli assi di L, vi è $\bigvee$. Lo stesso per F in simil modo è manifesto.

§ 13. (Fig. 8). Se $bn \parallel\!\!\parallel am$, $cp \parallel\!\!\parallel lq$, e sia $bam+abn=2R$, sarà anche $dcp+cdq=2R$. Sia infatti $ca=eb$, ed $efm=dcp$ (§ 4); sarà (essendo $bam+abn=2R=abn+abg$) $ebg=eaf$, e quindi se sia anche $bg=af$, tri.ebg = tri.eaf, $beg=aef$, e cadrà g in $...fe...$ É inoltre $gfm+fgn=2R$ (poichè $egb=efa$). È anche $gn \parallel\!\!\parallel fm$ (§ 6), sicchè se $mfrs=pcdq$, allora $rs \parallel\!\!\parallel gn$ (§ 7), ed r cade in o fuori fg (se cd non è $=fg$, nel qual caso già la cosa è manifesta).



I. Nel primo caso è frs non $>(2R-rfm=fgn)$, poichè $rs \parallel\!\!\parallel fm$; ma essendo $rs \parallel\!\!\parallel gn$, è anche frs non $<fgn$; adunque $frs=fgn$, ed $rfm+frs=gfm+fgn=2R$. Sicchè anche $dcp+cdq=2R$.

II. Se r cada fuori fg, allora $ngr=mfr$, e sia $mfgn \equiv nghl \equiv lhko$, e così di seguito sino a che diventi $fk=$, o per la prima volta $>fr$. É qui $ko \parallel\!\!\parallel hl \parallel\!\!\parallel fm$ (§ 7). Se k cada in r, allora ko cade in rs (§ 1), perciò $rfm+frs=kfm+fko=kfm+fgn=2R$; se poi r cada in hk, allora (per I.) è $rhl+krs=2R=rfm+frs=dcp+cdq$.

§ 14. Se $bn \parallel\!\!\parallel am$, $cp \parallel\!\!\parallel dq$, e sia $bam+abn<2R$, allora anche $dcp+cdq<2R$. Infatti se $dcp+cdq$ non fosse $<$, e quindi (per § 1) fosse $=2R$, allora (per § 13) sarebbe anche $bam+abn=2R$ (contro l'ipo.).

§ 15. Considerati i §§ 13 e 14: *Il sistema di Geometria, fondato sull'ipotesi della verità dell'assioma XI di Euclide dicasi* Σ, *ed il sistema costruito nell' ipotesi contraria sia* S. *Tutto ciò, che espressamente non si dica essere in* Σ o *pure in* S, *s'intenda essere enunciato assolutamente, vale a dire asserirsi vero, sia che valga* Σ o *pure* S.

§ 16. (Fig. 5, pag. 99). Se am sia asse di un L, allora L in Σ è la retta $\perp am$. Infatti sia da qualsivoglia punto b di L l'asse bn; sarà in Σ, $bam+abn=2bam=2R$, perciò $bam=R$. E se c sia un punto qualunque in $...ab...$, e $cp \parallel\!\!\parallel am$, è (per § 13) $cp \bigvee am$, e quindi c in L (§ 14).

In S al contrario 3 punti qualunque a, b, c di L o di F *non sono* in linea retta. Infatti alcuno degli assi am, bn, cp (p. e: am) cade tra i due rimanenti, ed allora (per § 14) tanto bam quanto $cam <R$.

§ 17. *In* S *è anche* L *una linea, ed* F *una superficie.* Infatti (per § 11) ogni piano $\perp$ all' asse $am...$ (per un punto di F) sega F secondo la periferia di un circolo, il di cui piano (per § 14) a nessun altro asse $bn...$ è $\perp$. Giri F intorno a bn, resterà (per § 12) ogni punto di F in F, e la sezione di F col piano non $\perp$ a $bn...$ descrive la superficie: ora F (per § 12) qualunque siano i punti a, b in essa, può

coincidere *con se stessa*, in modo che *a* cada in *b*; è adunque F *superficie uniforme*. É chiaro qnindi (per § 11 e 12) L essere *linea uniforme* (*).

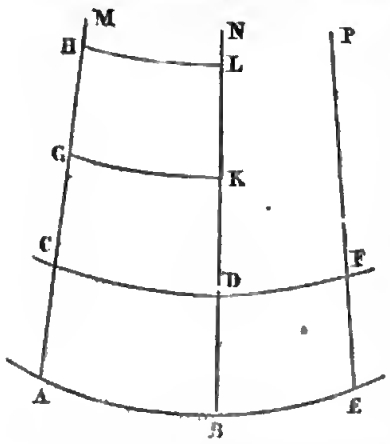
§ 18. (Fig. 7, pag. 100). *Di ogni piano*, condotto pel punto *a* di F obbliquamente all'asse *am*, *la sezione* con F in S è *la periferia di un circolo*. Infatti siano *a*, *b*, *c* tre punti di questa sezione, e *bn*, *cp* assi; faranno *amb n*, *amcp* un angolo, poichè altrimenti il piano (pel § 16) determinato da *a*, *b*, *c* conterrebbe la *am* (contro l'ipo). Adunque i piani biseganti le rette *ab*, *ac* ⌊ mente s'intersegano (§ 10) in un asse *fs*... (di F), ed *fb*=*fa*=*fc*. Sia *ah* ⌊ *fs*, e si rivolga *fah* intorno ad *fs*; descriverà *a* la periferia di raggio *ha*, la quale passa per *b* e *c*, e *simultaneamente* è situata in F ed in ...*abc* ...; nè F ed ...*abc*... oltre di per. *ha* hanno altro di comune (§ 16). È chiaro ancora dall'estremità della porzione *fa* della linea L (come raggio) fatta girare in F intorno ad *f* descriversi la stessa per. *ha*.

§ 19. (Fig. 5, pag. 99). La ⌊ *bt* all'asse *bn* di L (posta nel piano di L) è in S *tangente* di L. Infatti L non ha in ...*bt*... altro punto oltre di *b* (§ 14), se poi *bq* cada in *tbn* allora il centro della sezione del piano per *bq*, ⌊ a *tbn*, con l'F di *bn* ... manifestamente si trova in *bq*..., e se *bq* sia il diametro, è chiaro *bq* ... incontrare in *c* la linea L di *bn*.,.

§ 20. Da due punti qualunque in F la linea L è determinata (§ 11 e 18), ed (essendo per i § 16 e 19. L ⌊ a tutti i suoi assi) ogni angolo L lineo in F è = all'angolo dei piani, condotti per i suoi *lati*, ⌊ mente ad F.

§ 21. (Fig. 6, pag. 99) due linee L formi *ap*...,*bd*... nello stesso F, che fanno con la terza L forme *ab* la somma degl'interni <2R, s'intersegano (intentendo per ....*ap*... in F l'L condotto per *a* e *p*, per *ap*... poi quella sua metà che comincia da *a* nella quale cade *p*). Infatti se *am*, *bn* siano assi di F, allora *amp*...*bnd*... si segano scambievolmente (§ 9), ed F incontra la loro sezione (per i § 7 ed 11), e quindi anche *ap*..., *bd*... s' intersegano.

Si fa manifesto da ciò, l'assioma XI e tutto ciò, che in Geometria ed in Trigonometria piana si asserisce, valere *assolutamente* in F, in vece delle rette sostituendo le linee L: perciò le funzioni trigonometriche si prenderanno in appresso nello stesso senso che hanno in Σ; e la periferia del circolo, il di cui raggio L forme in F è =*r*, è =2π*r*, e similmente cir.*r* (in F)=π*r*² (per π intendendo $\frac{1}{2}$ per 1. in F, o sia il noto 3,1415926...).



§ 22. (Fig. 9). Se ...*ab*... sia l'L di ...*am*..., e *c* in ...*am*..., e l'angolo *cab* (formato dalla retta ...*am*... e dalla linea L forme *ab*...) si porti prima lungo *ab*..., e poi lungo *ba*... sem-

(*) Non è necessario restringere la dimostrazione ad S, essendo facile esporla in modo, che valga assolutamente (per S e Σ).

pre di seguito all'infinito, sarà la via *...cd...* di *c* la linea L di *cm...* Infatti (quest'ultima detta *l*) sia un punto qualsivoglia *d* in *...cd...*, *dn* ||| *cm*, e *b* il punto di L che cade in *...dn...*; sarà *bn*⋁*am*, ed *ac*=*bd*, perciò *dn*⋁*cm*, e quindi *d* in *l*. Se poi *d* sia in *l* e *dn* ||| *cm*, e *b* sia il punto di L comune a *...dn...*; sarà *am*⋁*bn* e *cm*⋁*dn*, onde manifestamente *bd*=*ac*, e cadrà *d* nella via del punto *c*, e sono *l* e *...cd...* la stessa cosa. Si dinoti tale *l* con *l* || L.

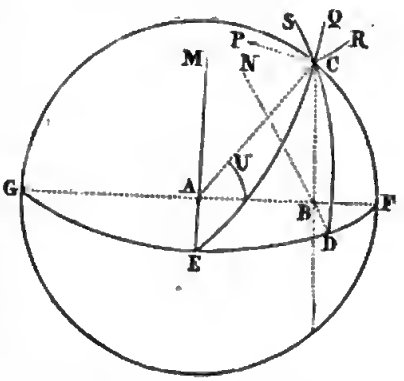
§ 23.(Fig.9, p.102). Se la linea Lforme *cdf* || *abc* (§ 22), ed *ab*=*be*, e siano *am... bn...*, *ep...* assi, sarà manifestamente *cd*=*df*; e se *a*, *b*, *e* siano tre punti qualunque di *...ab...*, ed *ab*=*n.cd*, sarà anche *ae*=*n.cf*; quindi (evidentemente anche per *ab*, *ae*, *cd* incommensurabili) *ab*: *cd* :: *ae* : *cf*, ed è *ab*: *cd* *indipendente* da *ab*, e da *ac* *del tutto determinato*. Si dinoti questo rapporto, cioè *ab*: *cd*, con la lettera maiuscola dello stesso nome (facciamo con X) della lettera minuscola (p. e. *x*) colla quale *ac* è indicata.

§ 24. Qualunque siano *x* ed *y*, è $Y=X^{\frac{y}{x}}$ (§ 23). Infatti o sarà uno degli *x*, *y* multiplo dell'altro (p. e. *y* di *x*), o no.

Se *y*=*nx*; sia *x*=*ac*=*cg*=*gh* etc, sino a che sia *ah*=*y*; sia inoltre *cd* || *gk* || *hl*; sarà (§ 23) $X=ab:cd=cd:gk=gk:hl$; e quindi $\frac{ab}{hl}=\left(\frac{ab}{cd}\right)^n$, o sia $Y=X^n=X^{\frac{y}{x}}$. Se *x*, *y* siano multipli di uno stesso *i*, facciamo *x*=*mi*, ed *y*=*ni*; è (per le cose precedenti) $X=1^m$, $Y=1^n$, per conseguenza $Y=X^{\frac{n}{m}}=X^{\frac{y}{x}}$. Lo stesso facilmente si estende al caso dell'incommensurabilità di *x* ed *y*. Se poi sia *q*=*y*—*x*, sarà evidentemente Q=Y:X.

È manifesto inoltre, essere in Σ per ogni *x*, X=1, in S al contrario X>1, e per qualsivogliano *ab*, *abe* darsi tale *cdf* || *abe*, in modo che sia *cdf*=*ab*, onde sarà *ambn*≡*amep*, benchè questo sia di quello un multiplo qualunque; il che al certo è singolare, ma evidentemente non mostra l'assurdità di S.

§ 25. (Fig. 10). *In ogni triangolo rettilineo le periferie di raggi eguali ai lati sono tra loro come i seni degli angoli opposti.*



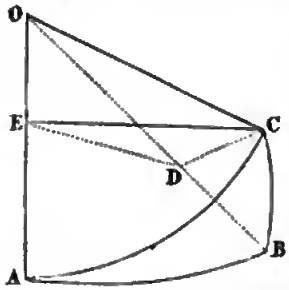
Sia infatti *abc*=R, ed *am*⌊*bac*, e siano *bn*, *cp* ||| *am*; sarà *cab*⌊*ambn*, e quindi (essendo *cb*⌊*b a*) *cb*⌊*ambn*, per conseguenza *cpbn*⌊*ambn*. Seghi l'F di *cp...* le rette *...bn...*, *...am...* (rispettivamente) in *d*, *e*, e le strisce *cpbn*, *cpam*, *bnam* secondo le lineformi L*cd*, *ce*, *de*; sarà (§ 20) *cde*= all'angolo di *ndc*, *nde*, e quindi =R; e per simile ragione è *ced*=*cab*.

È intanto (per § 21) nel triangolo L lineo *ced* (supposto qui sempre il raggio =1) *ec*: *dc*=1: sen*dec*=1: sen*cab*. È anche (per § 21) *ec*: *dc*=per. *ec*: per.*dc* (in F)=per. *ac*: per.*bc* (§ 18); quindi è anche per. *ac*

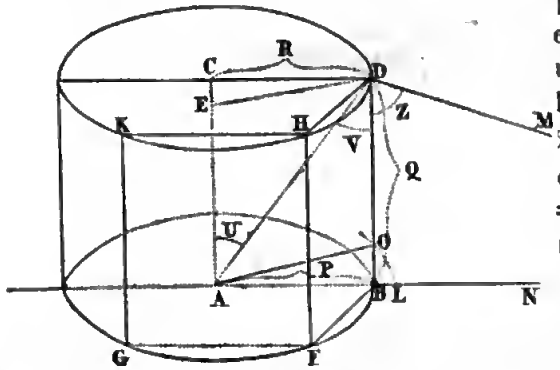
per.*bc*::1 :sen*cab*, onde ciò che si è asserito si rende evidente per ogni triangolo.

§ 26. *In ogni triangolo sferico i seni dei lati sono tra loro come i seni degli angoli ad essi opposti.*

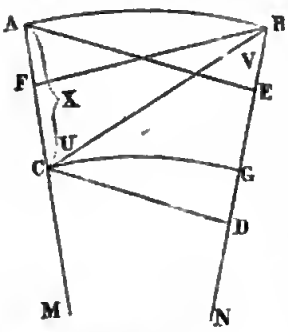
(Fig. 11). Infatti sia *abc*=R, e *ced*⌊ al raggio *oa* della sfera; sarà *ced*⌊*aob*, e (essendo anche *boc*⌊*boa*) *cd*⌊*ob*. Nei triangoli *ceo*, *cdo* poi è (per § 25), per. *ee*: per *oc*: per *dc*=sen *coe*:1 :sen*cod* =sen *ac*: 1 :sen *bc*; frattanto (§ 25) anche per.*ee*: per. *dc* =sen*cde*:sen *ced*. Sicchè sen *ac*: sen*bc*=sen*cde*: sen *eed*; ora è *ede*=R=*cba*, e *ced*=*cab*. Conseguentemente sen *ac*: sen *bc*=1: sen *a*. *Da ciò discendendo la Trigonometria sferica, essa è stabilita indipendentemente dall'Assioma XI.*



§ 27. (Fig. 12). Se *ac*, *bd* siano ⌊ *ab*, e si porti *cab* lungo ...*ab*..., sarà (la via del punto *c* detta qui *cd*) :*ab*=sen*u* : sen *v*. Infatti sia *de* ⌊ *ea*; è nei triangoli *ade*, *adb* (per § 25) per.*ed*: per.*ad*: per.*ab*=sen*u*: 1: sen *v*. Fatto girare *bacd* intorno ad *ac*, si descrive per. *ab* da *b*, per. *ed* da *d*, e la via della detta *cd* si dinoti qui per cir.*cd*. Sia inoltre un poligono qualunque *bfg*..., iscritto nel cir. *ab*; si produrrà dai piani condotti per tutt'i lati *bf*, *fg* etc. ⌊ a cir. *ab*, nel cir. *cd* anche una figura poligonale di altrettanti lati; e può dimostrarsi come del § 23, essere *cd*: *ab* = *dh* : *bf*=*hk*:*fg* etc.e quindi *dh*+*hk*,etc:*bf*+*fg*,etc. =*ed*: *ab*. Ciascuno dei lati *bf*, *fg*... tendendo al limite 0, manifestamente *bf*+*fg*. . .↷ per. *ab*, e *dh* +*hk*...↷per. *ed*. Adunque anche per. *ed*: per.*ab*=*cd*: *ab*. Era intanto per. *ed*: per. *ab*=sen *u*: sen *v*. Per conseguenza *cd*: *ab*=sen *u*: sen *v*.

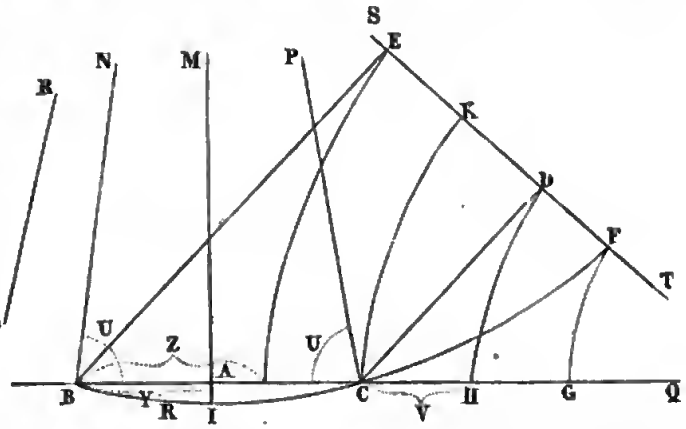


Allontanandosi *ac* da *bd* all'infinito, rimane *cd*: *ab*, e quindi anche sen *u*: sen *v* *costante*; ora *u*↷R (§ 4), e se sia *dm* ∥ *bn*, *v*↷*z*, onde si ha *cd* : *ab* : : 1 : sen *z*. La detta via *cd* si dinoterà con *cd* ∥ *ab*.

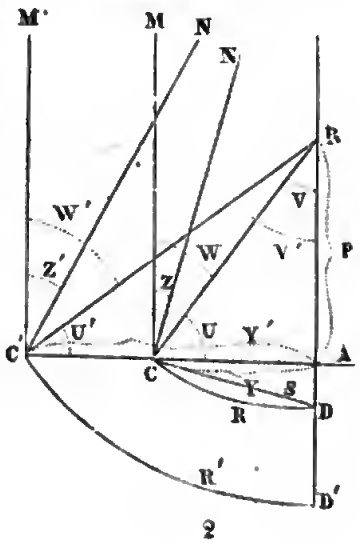


§ 28, (Fig. 13). Se *bn* ∥∥ ⋁*am*, e *c* in ...*am*..., e sia *ac*=*x*, sarà X (§ 23) = sen*u*: sen*v*. Infatti se *cd* ed *ae* siano ⌊ *bn*, e *bf*⌊*am*, sarà (come nel § 27) per. *bf*: per. *ed*=sen *u*:sen *v*. È intanto evidentemente *bf*=*ae*, per la qual cosa per.*ea*:per.*dc*=sen*u*:sen*v*. Nelle superficie F formi di *am* e *cm* (che segano *ambn* in *ab* e *cg*) è poi (per § 21) per.*ea*: per.*dc*=*ab*:*cg*=X. È quindi ancora X=sen*u*: sen*v*.

§ 29. (Fig. 14). Se $bam=R$, $ab=y$, e sia $bn \parallel\!\!\parallel am$, sarà in S, $Y=\cot\frac{1}{2}u$. Infatti se sia $ab=ac$, e $cp \parallel\!\!\parallel am$ (e quindi $bn \parallel\!\!\parallel \bigvee cp$) e $pcd=qcd$, si dà (§ 19) $ds \sqsubset \ldots cd \ldots$, in modo che sia $ds \parallel\!\!\parallel cp$, e quindi (§ 4) $dt \parallel\!\!\parallel cq$. Se inoltre $be \sqsubset \ldots ds \ldots$, sarà (§ 7) $ds \parallel\!\!\parallel bn$, e quindi (§ 6) $bn \parallel\!\!\parallel es$, e (essendo $dt \parallel\!\!\parallel cg$) $bq \parallel\!\!\parallel et$; per conseguenza (§ 4) $ebn=ebq$. Siano rappresentati, bcf dal L di bn, ed fg, dh, ck ed el dalle linee L formi di ft, dt, cq ed et; sarà evidentemente (§ 22) $hg=df=dk=hc$, sicchè $cg=2ch=2v$. Similmente è chiaro essere $bg=2bl=2z$. È poi $bc=bg-cg$, per lo che $y=z-v$, e quindi (§ 24) $Y=Z:V$. È finalmente (§ 28) $Z=1:\operatorname{sen}\frac{1}{2}u$, e $V=1:\operatorname{sen}(R-\frac{1}{2}u)$, per conseguenza $Y=\cot\frac{1}{2}u$.

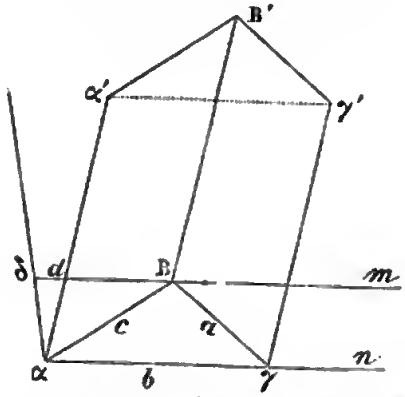


§ 30. (Fig. 15). È chiaro (pel § 25) per la risoluzione del problema della *Trigonometria piana* in S essere necessaria l'espressione della periferia per mezzo del raggio; ciò può ottenersi con la rettificazione di L. Siano ab, cm, $c'm' \sqsubset ac \ldots$, e b ove si voglia in $\ldots ab \ldots$; sarà (§ 25) $\operatorname{sen}u : \operatorname{sen}v = \text{per.}p : \text{per.}y$, e $\operatorname{sen}u' : \operatorname{sen}v' = \text{per.}p : \text{per.}y'$; quindi $\frac{\operatorname{sen}u}{\operatorname{sen}v}\text{. per.}y = \frac{\operatorname{sen}u'}{\operatorname{sen}v'}\text{. per. }y'$. È poi (per § 27) $\operatorname{sen}v : \operatorname{sen}v' = \cos u : \cos u'$, per conseguenza $\frac{\operatorname{sen}u}{\cos u}\text{. per.}y = \frac{\operatorname{sen}u'}{\cos u'}\text{. per.}y'$; o sia per. y: per. $y' = \operatorname{tang}u' : \operatorname{tang}u = \operatorname{tang}w : \operatorname{tang}w'$. Siano inoltre cn, $c'n' \parallel\!\!\parallel ab$, e cd, $c'd'$ linee L formi $\sqsubset ad \ldots ab \ldots$; sarà (§ 21) ancora per. y: per. $y' = r : r'$, e quindi $r : r' = \operatorname{tang}w : \operatorname{tang}w'$. Cresca p, cominciando da a, all'infinito; allora $w \curvearrowright z$, e $w' \curvearrowright z'$, per lo che anche $r : r' = \operatorname{tang}z : \operatorname{tang}z'$. *La costante* $r : \operatorname{tang}z$ (*indipendente* da r) si dica i; mentre $y \curvearrowright 0$, è $\left(\frac{r}{y} = \frac{i\operatorname{tang}z}{y}\right) \curvearrowright 1$, e quindi $\frac{y}{\operatorname{tang}z} \curvearrowright i$. Dal § 19 si ha $\operatorname{tang}z = \frac{1}{2}(Y - Y^{-1})$, adunque $\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \curvearrowright i$, o sia (§ 24) $\frac{2yl^{\frac{y}{i}}}{l^{\frac{2y}{i}} - 1} \curvearrowright i$.



Ora è noto, il limite di questa espressione (quando $y \curvearrowright 0$) essere $\frac{i}{\text{log.nat.I}}$; è dunque $\frac{i}{\text{log.nat.I}} = i$ ed $\text{I} = e = 2,7182818\ldots$, la quale insigne quantità qui anche si presenta. Se dunque in appresso dinoti i quella retta, di cui sia l'$\text{I} = e$, sarà $r = i\text{tang}z$. Era intanto (§ 21) per. $y = 2\pi r$, adunque è per. $y = 2\pi i \text{tang}z = \pi i(\text{Y} - \text{Y}^{-1}) = \pi i\,(e^{\frac{y}{i}} - e^{\frac{-y}{i}}) = \frac{\pi y}{\text{log.nat.Y}}(\text{Y} - \text{Y}^{-1})$ (per § 24).

§ 31. (Fig. 16). Per la risoluzione trigonometrica di tutt'i triangoli rettilinei rettangoli (dalla quale discende la risoluzione di tutt'i triangoli) in S, bastano 3 equazioni: cioè (dinotando a, b i cateti, c l'ipotenusa, ed α, β gli angoli opposti ai cateti) l'equazione esprimente la relazione 1° tra a, c, α; 2° tra a, α, β: 3° tra a, b, c: da queste le *altre* 3 si deducono con l'eliminazione.



I. Dai §§ 25 e 30 è

$1 : \text{sen}\alpha = (\text{C} - \text{C}^{-1}) : (\text{A} - \text{A}^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{\frac{-c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{\frac{-a}{i}})$,

(equazione tra α, c, a).

II. Dal § 27 segue (*) (se sia $\beta m \parallel\!\parallel \gamma n$), $\cos\alpha : \text{sen}\beta = 1 : \text{sen}u$; dal § 29 poi si ha $1 : \text{sen}u = \frac{1}{2}(\text{A} + \text{A}^{-1})$; adunque $\cos\alpha : \text{sen}\beta = \frac{1}{2}(\text{A} + \text{A}^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{\frac{-a}{i}})$, (equazione tra α, β, a).

III. Se $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, e siano $\beta\beta'$ e $\gamma\gamma' \parallel \alpha\alpha'$, (§ 27), e $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$, sarà manifestamente (come nel § 27)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\text{sen}u} = \frac{1}{2}(\text{A} + \text{A}^{-1}),$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(\text{B} + \text{B}^{-1}) \quad \text{e} \quad \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(\text{C} + \text{C}^{-1}):$$

per conseguenza

$$\frac{1}{2}(\text{C} + \text{C}^{-1}) = \frac{1}{2}(\text{A} + \text{A}^{-1}) \cdot \frac{1}{2}(\text{B} + \text{B}^{-1}),$$

o sia

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{\frac{-c}{i}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{\frac{-a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{\frac{-b}{i}}),$$

(equazione tra a, b, c).

Se $\gamma a\delta = \text{R}$, e sia $\beta\delta \perp \alpha\delta$, sarà per. c: per. $a = 1 : \text{sen}\alpha$, e per. c: per. $(d = \beta\delta) = 1 : \cos\alpha$, quindi (posto per. x^2 per ogni x onde dinotare per. x. per x.) manifestamente per. a^2 + per. d^2 = per. c^2. È poi (per § 27 e II) per. d = per. $b\frac{1}{2}(\text{A} + \text{A}^{-1})$ per

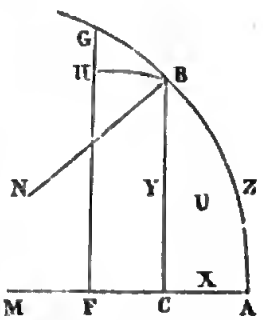
(*) Si mutino nella figura le lettere B e B' in β e β'.

conseguenza $(e^{\frac{c}{i}}-e^{-\frac{c}{i}})^2=\frac{1}{4}(e^{\frac{a}{i}}+e^{-\frac{a}{i}})^2(e^{\frac{b}{i}}-e^{-\frac{b}{i}})^2+(e^{\frac{a}{i}}-e^{-\frac{a}{i}})^2$, *altra* equazione tra a,b,c (di cui il secondo membro facilmente si riduce alla forma *simmetrica* o *invariabile*). Finalmente da $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{1}{2}(A+A^{-1})$, e $\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{2}(B+B^{-1})$, si ha (per III) $\cot\alpha.\cot\beta=\frac{1}{2}(e^{\frac{c}{i}}+e^{-\frac{c}{i}})$, (equazione tra (α, β, c).

§ 32. Rimane ancora a mostrare brevemente il modo di risolvere i *problemi* in S, il che effettuato (per gli esempii più ovvii) infine si dirà chiaramente ciò che questa teoria voglia significare.

I. (Fig. 17). Sia $ab\ldots$ una linea piana, ed $y=f(x)$ la sua equazione (tra coordinate $\equiv$), ed ogni incremento di z si dica dz, e si dinotino gl'incrementi di x, y, e dell'area u, corrispondenti allo stesso dz, rispettivamente con dx, dy. du; sia $bh \parallel cf$, e si esprima (pel § 31) $\frac{bh}{dx}$ per mezzo di y, e si cerchi il *limite* di $\frac{dy}{dx}$ tendendo dx al limite 0, (il che si sottintenda nella ricerca di tal limite): si conoscerà quindi ancora il limite di $\frac{dy}{bh}$, e perciò $\operatorname{tang} hbg$, e sarà (essendo hbc manifestamente nè $>$ nè $<$ e quindi $=$R), la *tangente* in b di bg determinata per mezzo di y.

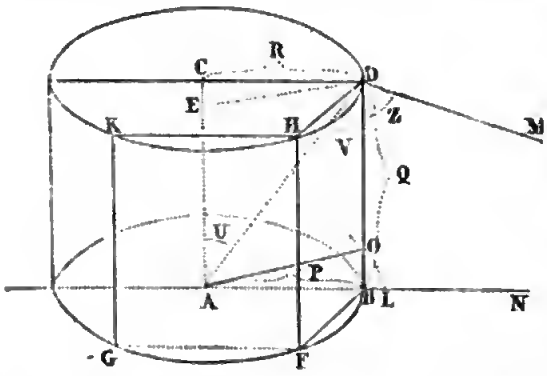
II. Si può dimostrare, essere $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2}\backsim 1$; da ciò il *limite* di $\frac{dz}{dx}$, e quindi per mezzo dell'integrazione si trova z (espresso per x). E si può trovare in S l'equazione di una linea qualsivoglia *data in concreto*; p. e. di L. Infatti se $am\ldots$, sia l'asse di L, allora ogni $cb\ldots$ condotta da $am\ldots$ incontra L (poichè pel § 19 ogni retta condotta per a, ad eccezione di $am\ldots$ incontra L); è intanto (se bn sia asse) $X=1:\operatorname{sen} cbn$ (§ 28), ed $Y=\cot\frac{1}{2}cbn$ (§ 19), onde si ha $Y=X+\sqrt{(X^2-1)}$, o sia $e^{\frac{y}{i}}=e^{\frac{x}{i}}+\sqrt{(e^{\frac{2x}{i}}-1)}$, equazione richiesta. Sarà quindi $\frac{dy}{dx}\backsim X(X^2-1)^{\frac{1}{2}}$, ma $\frac{bh}{dx}=1:\operatorname{sen} bcn=X$, adunque $\frac{dy}{bh}\backsim(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$; $1+\frac{dy^2}{bh^2}\backsim X^2(X^2-1)^{-1}$, $\frac{dz^2}{bh^2}\backsim X^2(X^2-1)^{-1}$, e $\frac{dz}{bh}\backsim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{dz}{dx}\backsim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$; onde con l'integrazione si trova $z=i(X^2-1)^{\frac{1}{2}}=i\cot cbn$ (come nel § 30).



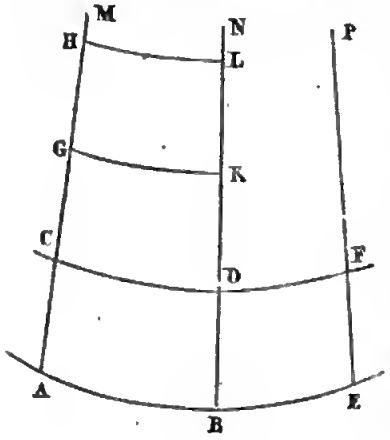
III. Manifestamente $\frac{du}{dx}\backsim\frac{hfcbh}{dx}$, il quale (se non è già dipendente da y) prima dovrà esprimersi per mezzo di y; onde con l'integrazione si ottiene u.

Se (Fig. 12) $ab=p$, $ac=q$, e $cd=r$, e sia $cabdc=s$, si potrà mostrare (come in II) essere $\frac{ds}{dq} \backsim r$, il quale $=\frac{1}{2}p(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}})$, ed integrando $s=\frac{1}{2}pi(e^{\frac{q}{i}}-e^{-\frac{q}{i}})$. Si può dedurre ciò anche senza integrazione. Esprimendo con equazione (per le cose precedenti) p. c. il circolo (pel § 31, III), la retta (pel § 31, II), una sezione conica, si potranno esprimere ancora le aree racchiuse da queste linee.

È chiaro, la superficie $t \parallel$ alla figura piana p (alla distanza q), stare a p nella ragione delle seconde potenze delle linee omologhe, o sia come $\frac{1}{4}(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}})^2 : 1$. In seguito, la valutazione della solidità trattata allo stesso modo si vede facilmente richiedere due integrazioni (poichè qui il differenziale stesso non si può determinare che con l'integrazione); e prima di tutto dovrà cercarsi il solido racchiuso da p e t, e dal complesso di tutte le rette perpendicolari a p che congiungono i termini di p e t. Si trova questo solido (tanto con l'integrazione quanto senza di essa) $=\frac{1}{8}pi[e^{\frac{2q}{i}}-e^{-\frac{2q}{i}}]+\frac{1}{2}pq$.



Si possono determinare anche in S le superficie dei corpi, non che le *curvature*, le *evolute* e le *evolventi* di linee qualunque etc. Per ciò che riguarda la curvatura, essa in S o è quella di L, o pure si determina per mezzo del raggio di un circolo, o per la distanza da una retta di una curva ad essa $\parallel$; potendosi facilmente mostrare per le cose precedenti, che oltre di L, delle linee circolari, e delle linee $\parallel$ ad una retta, non vi sono nel piano altre linee uniformi.

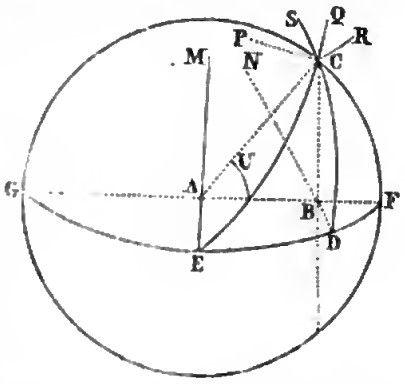


IV. Pel circolo è (come in III) $\frac{d\text{cir}.x}{dx} \backsim \text{per}.x$, onde (pel § 29) integrando si ha $\text{cir}.x=ri[e^{\frac{x}{i}}-2+e^{-\frac{x}{i}}]$.

V. Per l'area $cabdc=u$ (Fig. 9) racchiusa dalla linea L forme $ab=r$, dalla sua $\parallel$ $cd=y$, e dalle rette ac, bd) è $\frac{du}{dx} \backsim y$; e (§ 24) $y=re^{-\frac{x}{i}}$; quindi (integrando) $u=ri(1-e^{-\frac{x}{i}})$. Crescendo x all'infinito, si ha in S, $e^{-\frac{x}{i}} \backsim 0$, onde $u \backsim ri$. Per la *quantità* di *mabn*, in prosieguo s'intenda questo limite. Nello stesso modo si trova, che se p sia

una figura in F, lo spazio racchiuso da p e dal complesso degli assi condotti dai termini di p, è $=\frac{1}{2}pi$.

VI. Se l'angolo al centro del segmento z (Fig. 10) di una sfera sia $2u$, la periferia del circolo massimo sia p, e l'arco fe (dell'angolo u) $=x$ sarà 1 : sen $u=p$: per.bc (§ 23), e quindi per.$be=p\,\mathrm{sen}\,u$. Frattanto è $x=\frac{pu}{2\pi}$, e $dx=\frac{p\,du}{2\pi}$. È inoltre $\frac{dz}{dx}\backsim$ per.be, e quindi $\frac{dz}{du}\backsim\frac{p^2}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,u$, onde (integrando) $z=\frac{\mathrm{sen.v.}\,u}{2\pi}p^2$. Si concepisca l'F nel quale cade p (passante pel centro f del segmento); si conducano i piani ...*fem*...,...*cem*... per *af*, *ae* ad F, e che l'intersegano in *feg*,*ee*; e si considerino l'Lforme *ed* (da *e* ad *feg*) e l'Lforme *ef*; sarà *eef*$=u$ (§ 20), e (§ 21) $\frac{fd}{p}=\frac{\mathrm{sen.v.}\,u}{2\pi}$ e quindi $z=fd.p$. Ma (§ 21) $p=\pi.fdg$, perciò $z=\pi.fd.fdg$. Ora è (§ 21) $fd.fdg=fc\,fc$, per conseguenza $z=\pi fe.fe=$cir.fe in F. Sia (Fig. 14, p. 9) $bj=ej=r$; sarà (§ 30) $2r=i(Y-Y^{-1})$, e quindi (§ 21) cir. $2r$ (in F) $=\pi i^2(Y-Y^{-1})^2$. È anche (IV) cir.$2y=\pi i^2(Y^2-2+Y^{-2})$; adunque cir.$2r$ (in F) $=$cir.$2y$, onde la superficie z del *segmento sferico eguaglia un circolo, descritto con la corda* fe *come raggio*. Quindi tutta la superficie sferica $=$cir.$fg=fdg.p=\frac{p^2}{\pi}$, e *stanno tra loro le superficie sferiche, come le seconde potenze delle loro periferie massime*.



VII. La solidità della sfera di raggio x in S si trova similmente eguale ad $\frac{1}{2}\pi i^3(X^2-X^{-2})-2\pi i^2x$; la superficie generata dalla rivoluzione della linea *cd* (Fig. 12, pag. 108) intorno ad $ab=\frac{1}{2}\pi ip(Q^2-Q^{-2})$, ed il corpo descritto da *cabde* $=\frac{1}{4}\pi i^2p\,(Q-Q^{-1})^2$. *In qual modo poi tutto ciò che da IV sin qui si è trattato, anche senza integrazione possa ottenersi, per brevità si tralascia.*

Si può dimostrare, *il limite di ogni espressione contenente la lettera* i (e quindi fondata sull'*ipotesi*, che *si dia* i) *crescendo* i *all'infinito esprimere appunto la quantità corrispondente per* Σ (e quindi per l'ipotesi che *non vi sia* i), *quando altrimenti non vengano equazioni identiche*. Si badi però che non s'intenda potersi *variare il sistema stesso* (il quale è del tutto *in se e per se determinato*) ma solamente l'*ipotesi*, il che può farsi *successivamente*, finchè non fossimo condotti ad un assurdo. *Posto* adunque, che in *tale* espressione la lettera *i*, pel caso se avesse luogo S, dinoti *quella* quantità unica, il di cui S sia $=e$, se poi *effettivamente* avesse luogo Σ, s'*intenda* prendere il *detto limite* in luogo dell'espressione : manifesta

mente *tutte* le espressioni ottenute nell'*ipotesi della realità di* S (in questo senso) *valgono assolutamente*, benchè del *tutto sia ignoto, se sia o non sia* Σ.

Così p. e. dall' espressione ottenuta nel § 29 facilmente si ottiene (e *tanto* pel mezzo della differenziazione, *quanto senza* di esso) il noto valore per Σ di per.$x=2\pi x$; da I (§ 31) convenientemente trattato segue $1:\text{sen}x=c:a$; da II poi $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\beta}=1$ e quindi $\alpha+\beta=R$; l'equazione *prima* in III diviene identica, e perciò *vale* per Σ, quantunque non *determini* nulla in esso; dalla *seconda* però nasce $c^2=a^2+b^2$. *Le equazioni note fondamentali della trigonometria piana in* Σ. Inoltre si troveranno (dal § 32) per Σ l'area ed il volume in IV, l'una e l'altro $=pq$; da IV. cir. $x=\pi x^2$; (da VII) la sfera di raggio x, $=\frac{3}{4}\pi x^3$ etc. Sono anche i teoremi enunciati in fine di (VI) manifestamente *veri incondizionatamente*.

§ 33. Rimane ancora ad esporre ciò che questa teoria voglia significare (come si promise nel § 32).

I. Se Σ o pure un certo S *effettivamente* sia, rimane indeciso.

II. Tutto ciò che è dedotto nell' ipotesi della *falsità* dell'Assioma XI (sempre intendendo *nel senso* del § 32) vale *assolutamente*, e quindi *in questo senso non si fonda sopra alcuna ipotesi*. Si ha adunque una *trigonometria piana a priori* nella quale il *solo* sistema *stesso* rimane *ignoto*, e quindi solamente le grandezze *assolute* delle espressioni restano incognite, però un *solo* caso noto, manifestamente tutto il sistema rimarrebbe fissato. La trigonometria sferica poi è stabilita assolutamente nel § 26 (E si ha la Geometria di F del tutto analoga alla Geometria piana in Σ).

III. Se *constasse*, essere Σ, nulla a questo riguardo rimarrebbe altrimenti incognito; se poi *constasse non essere* Σ, allora (§ 31) (p. e.) con i lati x, y e l' angolo rettilineo da essi compreso, *dati in concreto*, manifestamente sarebbe impossibile in se e per se risolvere assolutamente il triangolo, vale a dire determinare a priori gli altri angoli, e *la ragione del terzo lato* ai due dati, a meno che non si determinassero X, Y, per lo che converrebbe *in concreto* avere un a, il di cui A fosse noto; ed allora i sarebbe l'*unità naturale delle lunghezze* (siccome e è la base dei logaritmi naturali). Se constasse l'esistenza di questo i, si mostrerà in qual modo possa costruirsi, con quella esattezza che si voglia.

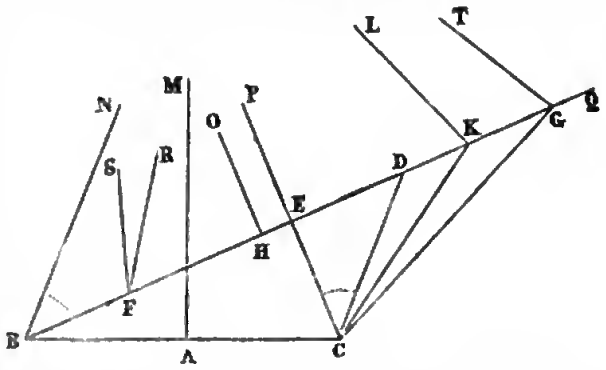
IV. Nel senso esposto in I e II è chiaro potersi trattare tutte le quistioni nello spazio col metodo analitico dei moderni (tra giusti limiti grandemente da apprezzarsi).

V. Finalmente non sarà sgradito dai benevoli lettori, per quel caso in cui non sia Σ ma bensì S, il costruire un rettilineo eguale ad un circolo.

§ 34. (Fig. 12, pag. 12) Da d si conduce $dm \parallel am$ nel modo seguente. Si tiri da d, $db \sqsubset an$, si elevi, da un punto qualunque a della retta, $\ldots ab\ldots, ac \sqsubset an$ (in dba), e si abbassi $de \sqsubset ac$; sarà per.ed: per.$ab=1:\text{sen}z$ (§ 27) quando $sia\ dm \parallel bn$. Ora è sen z non >1, e quindi ab non $>de$. Descritto adunque il quadrante col raggio eguale a de, col centro a in bac, avrà un punto b o pure o comune con $bd\ldots$ Nel

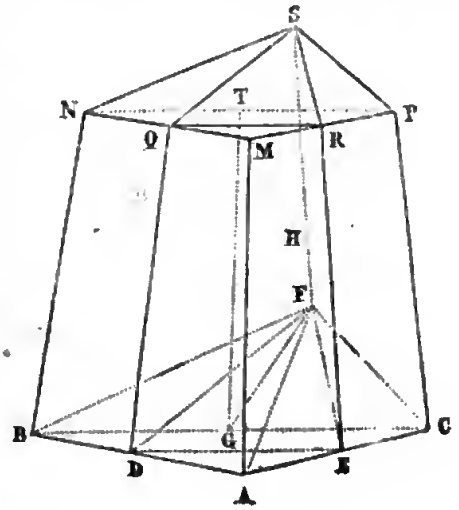
primo caso manifestamente $z=R$, nel secondo poi sarà (§ 25) (per.ao=per.ed): per.ab=1:sen aob, e quindi $z=aob$. Se adunque si faccia $z=aob$, sarà $dm \parallel bn$.

§ 35. (Fig. 18). Nella supposizione di S, si conduce la retta $\perp$ ad uno dei lati di un angolo acuto, che sia $\parallel$ all'altro, nel seguente modo. Sia $am \perp bc$, e si prenda $ab=ac$ tanto piccolo (per § 19), che se si conduca $bn \parallel am$ (§ 34) sia $abn >$ dell'angolo dato. Si tiri inoltre $cp \parallel am$ (§ 34), e si facciano nbq, pcd entrambi = all'angolo dato; $bq...$, $cd...$ s'interseghеranno. Infatti, incontri $bq...$ (che per costruzione cade in nbc) la $cp...$ in e; sarà (per $qn \vee cp$) $ebc < ecb$, onde $ec < eb$. Siano $ef=ec$, $efr=ecd$, ed $fs \parallel ep$; cadrà fs in bfr. Infatti essendo $bn \parallel cp$, onde $bn \parallel ep$, e $bn \parallel fs$, sarà (§ 14) $fbn+bfs < (2R=fbn+bfr)$ sicchè $bfs < bfr$. Per la qual cosa $fr...$ incontra ep .., e quindi anche $cd...$ la $eq...$ in un punto d. Sia ora $dg=dc$, e $dgt=dcp=gbn$; sarà (essendo $cd \vee gd$) $bn \vee gt \vee cp$. Se della linea Lforme di bn, sia k il punto che cade in $bq...$ (§ 19), e kl un asse, sarà $bn \vee kl$, e quindi $bkl=bgt=dcp$; ma anche $kl \vee cp$, cade adunque k manifestamente in g, ed è $gt \parallel bn$. Se ora ho bisega bc $\perp$mente, sarà costruita $ho \parallel bn$.



§ 36. (Fig. 10, p. 13). Se siano dati la retta $cp...$ ed il piano $...mab...$, e si faccia $cb \perp ...mab$, bn (in $...bcp...$) $\perp bc$, e $cq \parallel bn$ (§ 34), si troverà l'intersezione di $cp...$ (se questa retta cade in bcq) con $bn...$ (in $...cbn...$), e quindi con $...mab...$ E se siano dati due piani $...pcq...$, $...mab...$, e sia $cb \perp ...mab...$, $cr \perp ...pcq...$, ed (in $...bcr...$) $bn \perp bc$, $cs \perp cr$, cadranno bn in $...mab...$, e cs in $...pcq...$; e trovata (se si dà) l'intersezione di $...bn...$, $...cs...$, sarà la $\perp$ condotta per essa a cs,.. in pcq. manifestamente l'intersezione di $...mab...$, $...pcq..$:

§ 37. (Fig. 7). In $:..am..$ $\parallel bn$ si trova tale a, in modo che sia $am \vee bn$, se (pel § 34) si costruisca fuori... $nbm...$, $gt \parallel bn$, e si facciano $bg \perp gt$, $gc=gb$, e $cp \parallel gt$; si conduca $tgd...$ in modo che faccia con $tgb...$ un angolo eguale a quello, che $pca...$ fa con $pcb...$; si cerchi (pel § 36) l'intersezione $...dq...$ di $tgd...$, $nba...$; e si tiri $ba \perp dq$. Sarà infatti per la similitudine dei triangoli Llinei prodotti in F (§ 21), manifestamente $db=da$, ed $am \vee bn$.

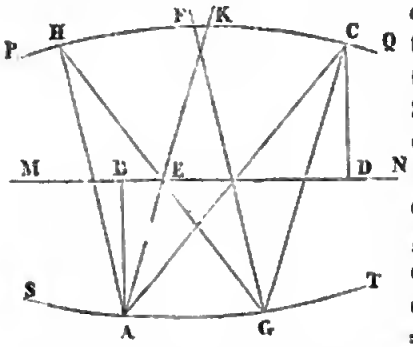


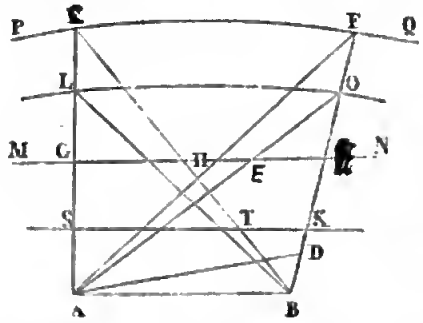
Facilmente si vede da ciò (essendo da-

te le linee L per *le sole loro estremità*) potersi trovare anche i *termini* di una proporzione, quarto e medio, e tutte le costruzioni geometriche, che si eseguono in Σ nel piano, in questo modo potersi effettuire in F *senza l'Assioma XI.* Così p. e. 4R si può dividere geometricamente in un certo numero di parti eguali, se questa divisione si può operare in Σ.

§ 38. (Fig. 14 p. 9). Se si costruisca (pel § 37) p. e. $nbq=\frac{1}{3}$R, si tiri (pel § 35) in S a *bq*... la ⌊ *am* ||| *bn*, e si determini (pel § 37) $jm\diagdown bn$, sarà, se sia $ja=x$, (§ 28) X=1: sen $\frac{1}{3}$R=2, ed x *geometricamente* costruito. E si può *nbq* così valutare, che *ja* differisca da *i* per meno di qualsivoglia quantità data non dovendo essere che sen $nbq=\frac{1}{e}$.

§ 39. (Fig. 19). Se siano (in un piano) *pq* ed *st* ‖ alla retta *mn* (§ 27), ed *ab*, *cd* ⌊ ad *mn* siano eguali, manifestamente è (*) tri.*dec* ≡ tri.*bea*, e quindi gli angoli *ecp*, *eat* (forse mistilinei) sono congruenti, ed *ec*=*ea*. Se inoltre *ck*=*ag*, sarà tri.*ack* ≡ tri.*cag*, e l'uno e l'altro è la metà del *quadrilatero kagc*. Se *kagc*, *hagf* siano rispetto ad *ag* due quadrilateri di tal fatta, tra *pq* ed *st*, è manifesta la loro eguaglianza (come presso *Euclide*) non che quella dei triangoli *agc*, *agh* insistenti sulla stessa *ag*, ed aventi i vertici in ...*pq*... È d'altronde *ack* =*cag*, *gcq*=*cga*, ed *ack*+*acg*+*gcq*=2R (§ 32) e quindi anche *cag*+*acg*+*cga*=2R: sicchè in ognuno di tali triangoli *acg* la somma dei tre angoli=2R. Sia che in *ag* (che è ‖ *mn*) cada intanto la *retta ag*, o non, è manifesta *l'eguaglianza tanto dei triangoli rettilinei* agc, agh, *quanto quella delle somme dei loro angoli.*



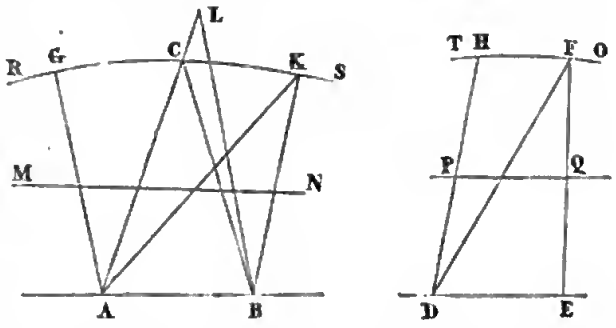


§ 40. (Fig. 20). *Triangoli eguali* abc, abd (*d'ora innanzi rettilinei*) *che hanno un lato eguale, hanno eguali le somme degli angoli.* Infatti (**) divida *mn* per metà tanto *ac* quanto *bc*, e sia *pq* (per *c*) ‖ *mn*; cadrà *d* in...*pq*... Poichè se *bd*... incontri ...*mn*... nel punto *e*, e quindi (§ 39)...*pq*...alla distanza *ef*=*eb*, sarà tri.*abc* = tri. *abf*, e perciò anche tri.*abd* =tri.*abf*, onde *d* cade in *f*: se poi *bd*... non incontrasse...*mn*...sia *ĉ* il punto, in cui la ⌊ bisegante di *ab* incontra ...*pq* .,, e *gs*=*ht* in modo, che ...*st*... *prolungata* incontri ...*bd*... in un punto *â* (e ciò potersi fare si rende manifesto come nel § 4); siano

(*) Si ponga nella figura la lettera E al punto d'incontro di AC con MN.
(**) Si ponga nella linea PQ della figura la lettera C invece di E.

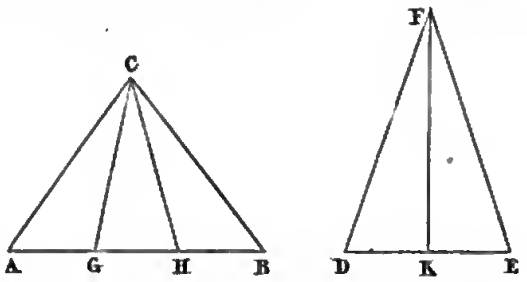
inoltre $sl=sa$, $lo \parallel st$, ed o l'intersezione di...bk...ed...lo...: sarebbe allora tri.abl =tri.abo (§ 39), e quindi tri.abc>tri.abd(contro l'ipotesi).

§ 41. (Fig. 21). *Eguali triangoli* abc, def, *hanno eguali le somme degli angoli.* Infatti seghi mn per metà tanto ac, quanto bc, del pari che pq tanto df quanto fe, e sia $rs \parallel mn$, e $to \parallel pq$; sarà la $\llcorner ag$ ad rs o = alla $\llcorner dh$ a to, o l'una di esse p. e. dh sarà maggiore: nell'uno e l'altro caso per.df col centro a, ha con ...gs... un punto k comune, e sarà (§ 39) tri.abk=tri.abc=tri.def. È poi il tri.akb (pel § 40) *equiangolo* al tri.dfe, e (pel § 39) al tri.abc. Sono adunque anche i triangoli abc, def equiangoli.



In S si può anche *invertire* il teorema. Siano infatti reciprocamente i triangoli abc, def equiangoli, e tri. bal = tri. def; sarà (per le cose precedenti) l'uno equiangolo all'altro, e quindi anche il tri.abc al tri.abl, onde manifestamente si ha $bcl+blc+cbl=2R$. Ma (pel § 31) la somma degli angoli di ogni triangolo in S è $<2R$, cade adunque l in c.

§ 42. (Fig. 22). Se sia u il *complemento* a 2R della somma degli angoli del tri.abc, e v quello pel tri.def, è tri.abc: tri.$def=u:v$. Infatti se ognuno dei triangoli acg, gch, heb, dfk, kfe sia $=p$, e tri.$abc=np$, tri.$def=np$, e sia s la somma degli angoli di ciascun triangolo che è $=p$; sarà manifestamente $2R-u=ms-(m-1)2R=2R-m(2R-s)$, ed $u=m(2R-s)$, similmente $v=n(2R-s)$. È adunque tri.abc: tri.$def=m:n=u:v$. Facilmente si vede estendersi ciò anche al caso dell'incommensurabilità dei triangoli abc, def.



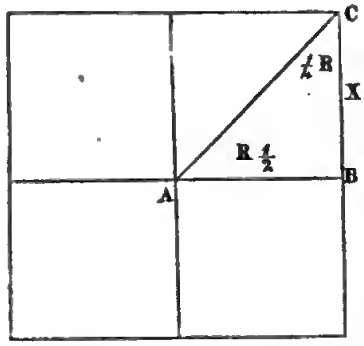
Nello stesso modo si dimostra i triangoli sulla superficie sferica stare tra loro come gli *eccessi* delle somme dei loro angoli sopra 2R. Se due angoli del triangolo sferico siano retti, il terzo z sarà il detto eccesso; è intanto questo triangolo (detta p la periferia massima) manifestamente $=\frac{z}{2\pi}.\frac{p^2}{2\pi}$ (§ 32, VI); per conseguenza ogni triangolo, in cui l'eccesso degli angoli $=z$, è $=\frac{zp^2}{4\pi^2}$.

§ 43. (Fig. 15). Già *l'area* del triangolo rettilineo in S si esprime per mezzo della somma degli angoli. Se ab cresca all'infinito, sarà (§ 42) tri.abc: (R—u—v)

costante. Ora è tri.$abc \curvearrowright bacn$ (§ 32 V), ed $R-u-v \curvearrowright z$ (§ 1) ; adunque $bacn : z =$ tri. $abc : (R-u-v) = bac'n' : z'$. È d'altronde manifestamente $bdcn : bd'c'n' = r : r' =$ $\text{tang}z : \text{tang}z'$ (§ 30). Per $y' \curvearrowright 0$ è poi $\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \curvearrowright 1$, non che $\frac{\text{tang}z'}{z'} \curvearrowright 1$; per conseguenza $bdcn : bacn = \text{tang}z : z$. Era intanto (§ 32) $bdcn = ri = i^2\text{tang}z$; è adunque $bacn = zi^2$ Detto in seguito brevemente Δ ogni triangolo in cui il complemento a 2R della somma degli angoli sia z, sarà perciò $\Delta = zi^2$

Facilmente discende da ciò , che se siano (Fig. 14) $or \parallel am$, ed $ro \parallel ab$, *l'area* compresa tra ...or,..,....st.....bc ..., (la quale manifestamente è il limite assoluto delle aree dei triangoli rettilinei crescenti indefinitamente , vale a dire di Δ per $z \curvearrowright 2R$), sia $= \pi i^2 =$ cir.i in F. Indicando questo limite con Ω, sarà inoltre (Fig. 15) (pel § 30) $\pi r^2 = \Omega \text{tang}^2 z =$ cir.r in F (§ 21) = cir.s (pel § 32, VI) se la corda dc si chiami s. Se il dato raggio s del circolo nel piano (o pure il raggio Lforme del circolo in F) essendo bisegato $\llcorner$mente, si costruisca (pel § 34) $db \parallel \bigvee cu$, abbassata la $\llcorner$ ca a db, ed elevata la $\llcorner$ cm a ca, si avrà z, onde (pel § 37) $\text{tang}^2 z$, assunto un raggio Lforme a piacere per unità, *potrà determinarsi geometricamente per mezzo di due linee uniformi della stessa curvatura* (le quali, essendo date le sole estremità, costruiti gli assi, manifestamente possono commensurarsi allo stesso modo delle linee rette, e sotto questo riguardo considerarsi come equivalenti alle rette).

D'altronde (Fig. 23) si costruisce un quadrilatero p. e. regolare $= \Omega$. Come segue. Sia $abc = R$, $bac = \frac{1}{2} R$, $acb = \frac{1}{4} R$, e $bc = x$;



otrà esprimersi X (pel § 31, II) per sole radici quadrate , e pel (§ 37) costruirsi : ottenuto X (pel § 38 , o ancora 29 e 35) può determinarsi lo stesso x. È l'ottuplo del tri.abc manifestamente $= \Omega$, e *con ciò, il circolo piano di raggio s, per mezzo di una figura rettilinea, e di linee uniformi dello stesso genere (equivalenti alle rette, in quanto alla comparazione tra loro) geometricamente è quadrato* ; *il circolo Fforme poi nello stesso modo è complanato; e si ha*, o *vero l'Assioma XI di Euclide*, o *la quadratura geometrica del circolo;* benchè sin qui sia rimasto indeciso, quale di queste due cose veramente abbia luogo. Sempre che sia $\text{tang}^2 z$ o un numero intero , o una frazione razionale la quale (ridotta alla più semplice espressione) abbia il denominatore o un numero primo della forma $2^m + 1$ (di cui è ancora $2 = 2^0 + 1$) o il prodotto di quanti si vogliano numeri primi di tale forma, in cui (eccettuato il 2, che solo può occorrere quante volte si vuole) ciascuno occorre *una sola volta* come fattore , per la teoria dei poligoni dell'illustre *Gauss* (celeberrima scoperta del nostro, anzi di ogni secolo) può anche trovarsi una figura rettilinea eguale ad $\Omega \text{tang}^2 z =$ cir.s (e solamente per tali valori di z). Infatti la *divisione* di Ω (esteso facilmente il teorema del § 42 ai po-

ligoni qualunque) manifestamente richiede quella di 2R, la quale (come può dimostrarsi) unicamente posta la detta condizione può geometricamente effettuarsi. In tutti tali casi intanto le cose precedenti facilmente conducono allo scopo. E può ogni figura rettilinea convertirsi geometricamente in poligono regolare di n lati, se n cada sotto la forma *Gaussiana*.

Resterebbe finalmente (per considerare completamente la cosa) a dimostrare la impossibilità (senza fare qualche supposizione) di decidere, se sia Σ, o un qualche S (e quale); il che però si riserva a migliore occasione.

SBN 079578

Digitized by Google